Lec 43 Taylor 级数

设 $f(x)$ 在 $\bar{U}(x_0,\delta) := (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有 $n+1$ 阶导数, 则对 $\forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$, 有 $f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 其中 ξ 在 x_0 和 x 之间. 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. 称此为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式,$R_n(x)$ 为 Lagrange 余项.

43.1 Taylor 级数

定理 43.1

若 $f(x) \in C^\infty(\bar{U}(x_0,\delta))$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处能展开成 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$$

的充要条件是: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$. ♡

证明 必要性: 已知 $f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$, 则部分和 $S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \to f(x), n \to \infty, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$, 此时 $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = S_n(x) + R_n(x)$, 因此 $R_n(x) = f(x) - S_n(x) \to 0, n \to \infty, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$.

充分性:$f(x) \in C^\infty(\bar{U}(x_0,\delta)) \Rightarrow f(x) \in C^{n+1}(\bar{U}(x_0,\delta))$,$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_n(x)$, 由已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$, 则取 $n \to \infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$.

定理 43.2

若 $f(x) \in C^\infty(\bar{U}(x_0,\delta))$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处能展开成 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$$

的充分条件为:$f^{(n)}(x)$ 在 $\bar{U}(x_0,\delta)$ 中一致有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in \bar{U}(x_0,\delta)$. ♡

证明 由 $f \in C^\infty(\bar{U}(x_0,\delta)) \Rightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_n(x)$, 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-$

$x_0)^{n+1}$, $|R_n(x)|=\dfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leq\dfrac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\to 0, n\to\infty, \forall x\in\bar{U}(x_0,\delta)$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0, \forall x\in\bar{U}(x_0,\delta)$. 由上一定理即可得证.

43.2 七个常用的 Taylor 级数

1. $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln a)^n}{n!}x^n, \forall x\in\mathbb{R}.$
2. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x\in\mathbb{R}.$
3. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x\in\mathbb{R}.$
4. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}x^n, \forall x\in(-1,1).$
5. $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \forall x\in(-1,1).$
6. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}, \forall x\in(-1,1].$
7. $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x\in(-1,1).$

证明 对于初等函数, 其 Taylor 展开中的余项 R_n 已知, 因此只要检验当 $n\to\infty$ 时, 余项的极限是否为零即可.

1. 指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$： 当 $|x|<M$ 时,$|f^{(n)}(x)|=|(\mathrm{e}^x)^{(n)}|=|\mathrm{e}^x|\leq \mathrm{e}^M$ （$n=1,2,\dots$）, 且 $f^{(n)}(0)=1$, 所以
$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
又因为 M 是任意的, 所以上面的展开式对所有实数成立. 特别取 $x=1$, 有
$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$
2. $\left|\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sin x\right|=|\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})|\leq 1.$
3. $\left|\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos x\right|=|\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})|\leq 1.$
4. 二项式函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ （α 为任意实数）:
用类似上面的方法也可以得到二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开式. 为避免估计余项的困难, 可用下方法.
因为
$$f^{(n)}(0)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1+x)^\alpha\bigg|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

所以二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 系数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

放这个系数的收敛半径为 1. 为了证明它在收敛区间 $(-1,1)$ 上的和函数就是 $(1+x)^\alpha$, 设

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

通项求导得

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

以 $1+x$ 乘以等式两端, 并合并右端 x 的同次幂系数就得到了关系式

$$(1+x)F'(x)=\alpha F(x).$$

解此微分方程并注意到 $F(0)=1$, 即可算得

$$F(x)=(1+x)^\alpha.$$

当 α 是自然数时,$(1+x)$ 的展开式就是熟知的二项式定理.

5. 取 $\alpha=-1$, 得到 $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.
6. 对 $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 两边求积分, 得到 $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. 且 $\ln 2=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 故 $x=1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$. 也收敛, 故收敛域为 $(-1,1]$.
7. 对 $\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 两边求积分, 得到 $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

例 43.1 将下列函数在指定点 x_0 处展开成 Taylor 级数:

1. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x_0=4,0,-3$;
2. $\sin^2 x$ 在 $x_0=0$;
3. e^x 在 $x_0=5$;
4. $\log_5 x$ 在 $x_0=1$.
5. $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 在 $x_0=0$.
6. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在 $x_0=0$.
7. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ 在 $x_0=0$.
8. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ 在 $x_0=0$.

解

1. (a). $x_0=4$:$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1+\frac{x-4}{5}}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{1+\frac{x-4}{6}}=\dfrac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-4)^n}{5^n}-\dfrac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-4)^n}{6^n}$. $\left|\dfrac{x-4}{5}\right|<1,\left|\dfrac{x-4}{6}\right|<1\Rightarrow -1<x<9$.

 (b). $x_0=0$:$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n}$. $|x|<1,\left|\dfrac{x}{2}\right|<1\Rightarrow -1<x<1$.

 (c). $x_0=-3$:$\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{-2}\dfrac{1}{1+\frac{x+3}{-2}}-\dfrac{1}{-1}\dfrac{1}{1+\frac{x+3}{-1}}=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+3)^n$. $\left|\dfrac{x+3}{-2}\right|<1,\left|\dfrac{x+3}{-1}\right|<1\Rightarrow -4<x<-2$.

2. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. $|x|<\infty$.

3. $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^5\mathrm{e}^{x-5}=\mathrm{e}^5\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^5\dfrac{(x-5)^n}{n!}$. $|x-5|<\infty\Rightarrow -\infty<x<\infty$.

4. $\log_5 x=\dfrac{\ln x}{\ln 5}=\dfrac{\ln(1+(x-1))}{\ln 5}=\dfrac{1}{\ln 5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln 5}(x-1)^n$. $|x-1|<1\Rightarrow 0<x<2$.

5. $f'(x)=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},|x|\le 1\Rightarrow$

$$f(x)=\int_0^x\arctan u\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},|x|\le 1.$$

6. $\mathrm{e}^{-u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{n!},|u|<\infty\Rightarrow$

$$\int_0^x\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},|x|<\infty.$$

7. $\dfrac{\sin u}{u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n+1)!},|u|<\infty\Rightarrow$

$$\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},|x|<\infty.$$

注 题 6 中的 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 存在 Taylor 级数:$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{0}{n!}x^n=0$. 但是 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数并不收敛于 $f(x)$.

作业 ex7.3:5(2)(3)(4)(6),6(1)(2)(4)(5)(7);CH7:2.